Schriftliche Prüfungsarbeit zur erweiterten Berufsbildungsreife und zum mittleren Schulabschluss 2020 im Fach Mathematik

25. Mai 2020 (Corona)

Mittwoch, ~~29. April 2020~~

LÖSUNGEN

Arbeitszeit: 10:00 – 12:15 Uhr

Bearbeitungszeit: 135 Minuten

Anzahl der Aufgaben 7

Zugelassene Hilfsmittel:

- beiliegende Formelübersicht (eine Doppelseite)
- an der Schule eingeführter wissenschaftlicher Taschenrechner (nicht grafikfähig, nicht programmierbar, nicht symbolisch rechnend)
- Standard-Zeichenwerkzeuge

Erweiterte Berufsbildungsreife:

40 Punkte entsprechen 100 % der Gesamtleistung.

Mittlerer Schulabschluss:

60 Punkte entsprechen 100 % der Gesamtleistung.

Aufgaben zu anspruchsvolleren Themen sind mit einem Stern (*) gekennzeichnet.

Alle richtig bearbeiteten Aufgaben werden für beide Abschlüsse angerechnet.

Bitte bearbeiten Sie alle Aufgaben im Aufgabenheft. Sollte der zur Verfügung stehende Platz nicht ausreichen, fügen Sie Ihre Ergänzungen auf einem gesonderten Blatt ein.

Alle Lösungswege müssen nachvollziehbar dokumentiert sein.

Denken Sie an Begründungen und vergessen Sie bei Textaufgaben nicht den Antwortsatz.

Falls Sie eine Lösung durch Probieren finden, müssen Sie Ihre Überlegungen ausreichend kommentieren, falls der Operator es verlangt.

Name, Vorname: . . . . Klasse: . . . .

Aufgabe 1: Basisaufgaben

(10 Punkte)

a) Herr Förster sagt: „Nur 4 % meiner Bäume wachsen nicht an." (1 P)

Kreuzen Sie die richtige Aussage an.

☐ 4 von 10 Bäumen wachsen nicht an.

☐ Jeder 4. Baum wächst nicht an.

☒ 4 von 100 Bäumen wachsen nicht an.

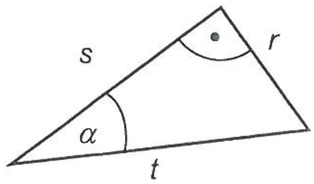
b) Einer der folgenden Punkte liegt auf der *x*-Achse des Koordinatensystems. (1 P)

Kreuzen Sie den richtigen Punkt an.

☐ $A(3|2)$ ☐ $B(0|2)$ ☐ $C(-3|-2)$ ☒ $D(3|0)$

c) Geben Sie die Gleichung für $\tan\alpha$ an. (1 P)

$\tan\alpha = \frac{r}{s}$



d) Der Flächeninhalt eines Quadrates beträgt 36 cm². (1 P)

Notieren Sie die Seitenlänge des Quadrates.

$36\ cm^2 = a^2 \quad |\sqrt{\ }$

$a = \underline{\underline{6\ cm}}$

e) Geben Sie die Lösung der Gleichung $2(x-4)=6$ an. (1 P)

$x =$ 7

$2(x-4) = 6$

$2x - 8 = 6 \quad |+8$

$2x = 14 \quad |:2$

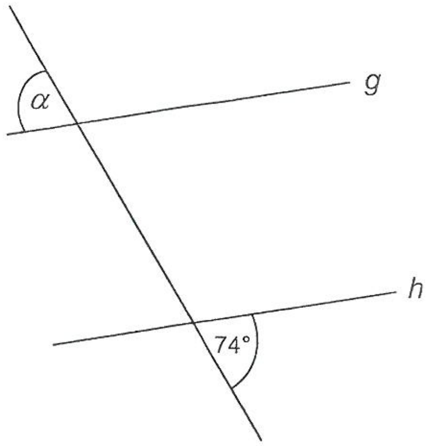
$x = 7$

f) Geben Sie die Zahl an, die genau in der Mitte zwischen –0,6 und –0,5 liegt. (1 P)

$(-0{,}6 + (-0{,}5)) : 2 = -1{,}1 : 2 = \underline{\underline{-0{,}55}}$

g) Die beiden Geraden g und h sind parallel zueinander. (1 P)

Geben Sie die Größe des Winkels α an.



(Skizze nicht maßstabsgerecht)

$\alpha =$ 74°

h) Geben Sie die Zahl x an, für die die Gleichung $2^x = 16$ gilt. (1 P)

$x =$ 4

$(2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16)$

i) Im Dreieck ABC hat die Seite a eine Länge von 10 cm. (1 P)
Für die Summe der Seitenlängen b und c gilt eine der folgenden Aussagen.

Kreuzen Sie die richtige Aussage an.

☒ $b + c > 10\,\text{cm}$

☐ $b + c = 10\,\text{cm}$

☐ $b + c < 10\,\text{cm}$

j) Für x wurde die Gleichung $\sin 30° = \frac{7}{x}$ aufgestellt. (1 P)

Geben Sie den Wert von x an.

$\sin 30° = 7 : x \quad | \cdot x$

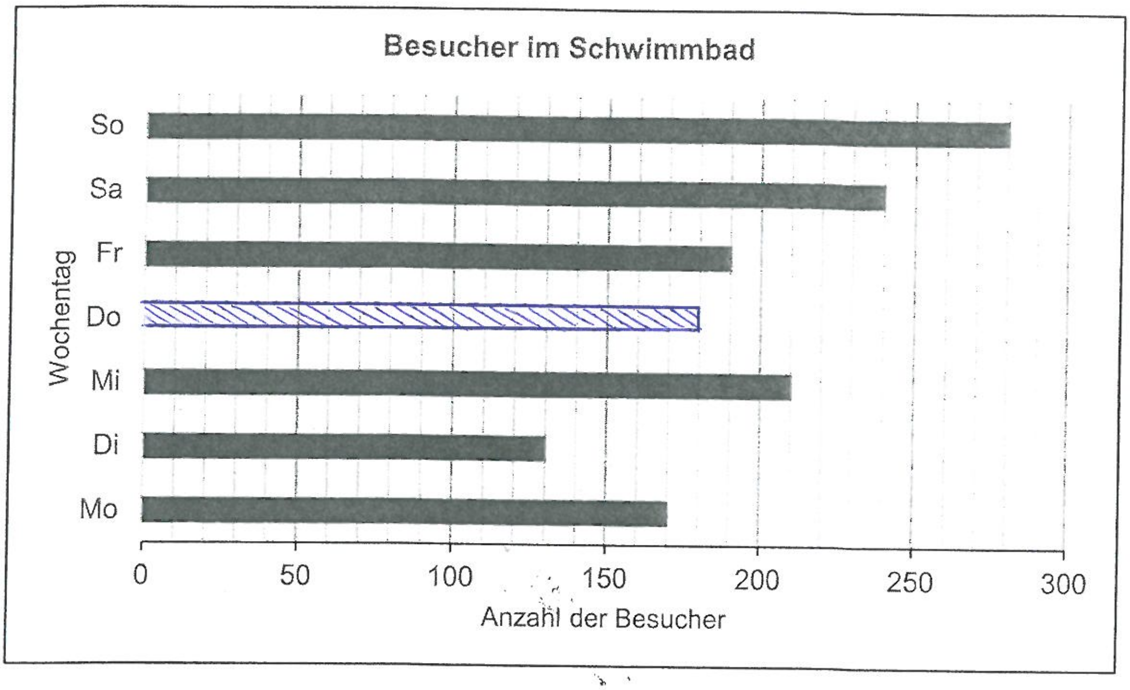
$x \cdot \sin 30° = 7 \quad | : \sin 30°$

$x = 7 : \sin 30°$

$x = 14$

Aufgabe 2: Schwimmbad **(9 Punkte)**

In dem Diagramm soll die Anzahl der Besucher eines Schwimmbades in der ersten Ferienwoche der Sommerferien dargestellt werden.
Am Donnerstag waren 180 Besucher im Schwimmbad.



a) Ergänzen Sie im Diagramm den Balken für Donnerstag. (1 P)

b) Notieren Sie, an welchen Tagen mehr als 190 Besucher im Schwimmbad waren. (1 P)

Mittwoch, Samstag und Sonntag waren mehr als 190 Besucher im Schwimmbad.

c) Berechnen Sie die durchschnittliche Anzahl der Besucher in der ersten Ferienwoche. (2 P)

Mo: 170, Die: 130, Mi: 210, Do: 180, Fr: 190, Sa: 240, So: 280

$(170 + 130 + 210 + 180 + 190 + 240 + 280) : 7 = \bar{x}$

$1.400 : 7 = \bar{x}$

$\bar{x} = 200$

Antw.: Durchschnittlich waren in der ersten Ferienwoche 200 Besucher pro Tag im Schwimmbad.

d) Die beiden folgenden Aussagen sind wahr. (2 P)

Weisen Sie die Aussagen rechnerisch nach.

Aussage	Nachweis
Die Spannweite der Besucherzahlen in der ersten Ferienwoche beträgt 150 Besucher.	Maximum : 280 Minimum: 130 Spannweite = Maximum - Minimum Spannweite = 280 - 130 Spannweite = $\underline{\underline{150}}$
Am Sonntag kamen ein Drittel mehr Besucher als am Mittwoch.	Mittwoch: 210 Besucher 210 : 3 = 70 210 + 70 = $\underline{\underline{280}}$ ≙ Besucherzahl vom Sonntag

Am Wochenende kamen 520 Besucher in das Schwimmbad.
An diesen Tagen kostet die Tageskarte 12 € pro Person.

*e) Der Betreiber des Schwimmbades behauptet: (3 P)
„Wären am Wochenende *x* Besucher mehr gekommen, dann hätte ich am Wochenende 7920 € Einnahmen erzielt."

Stellen Sie eine Gleichung auf, die diesen Sachverhalt beschreibt.

$(520 + x) \cdot 12€ = 7.920€$

Ermitteln Sie die Anzahl *x* der Besucher, die dafür gefehlt hat.

$(520 + x) \cdot 12€ = 7.920€ \quad |:12€$

$520 + x = 660 \quad |-520$

$\underline{\underline{x = 140}}$

140 Besucher haben gefehlt, um 7.920€ Einnahmen zu erzielen.

c) Der Punkt $A(2|y)$ liegt auf dem Graphen von f mit der Gleichung $y=(x+2)^2-4$. (2 P)

Bestimmen Sie den Wert der y-Koordinate des Punktes A.

$y = (x+2)^2 - 4$
$y = (2+2)^2 - 4$
$y = 4^2 - 4$
$y = 16 - 4$
$\underline{\underline{y = 12}}$

$\Rightarrow A(2/12)$

*d) Die Parabel p entsteht durch Spiegelung des Graphen f an der y-Achse. (3 P)

Skizzieren Sie die Parabel p in dem vorgegebenen Koordinatensystem.

Geben Sie eine Gleichung für p an.

$p(x) = (x-2)^2 - 4$

*e) Berechnen Sie für die Funktion mit der Gleichung $y = 2x^2 + 8x + 6$ die Nullstellen. (3 P)

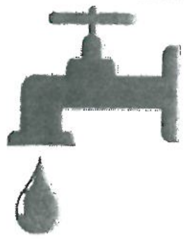
$y = 2x^2 + 8x + 6$
$0 = 2x^2 + 8x + 6 \quad |:2$
$0 = x^2 + 4x + 3$
$x_{1/2} = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - 3}$
$x_{1/2} = -2 \pm \sqrt{2^2 - 3}$
$= -2 \pm \sqrt{4-3}$
$= -2 \pm \sqrt{1}$
$x_1 = -2 + \sqrt{1} = -1$
$x_2 = -2 - \sqrt{1} = -3$

1. Nullstelle bei $\underline{\underline{(-1|0)}}$
2. Nullstelle bei $\underline{\underline{(-3|0)}}$

Aufgabe 4: Wasserverbrauch (8 Punkte)

Weltweiter Wasserverbrauch

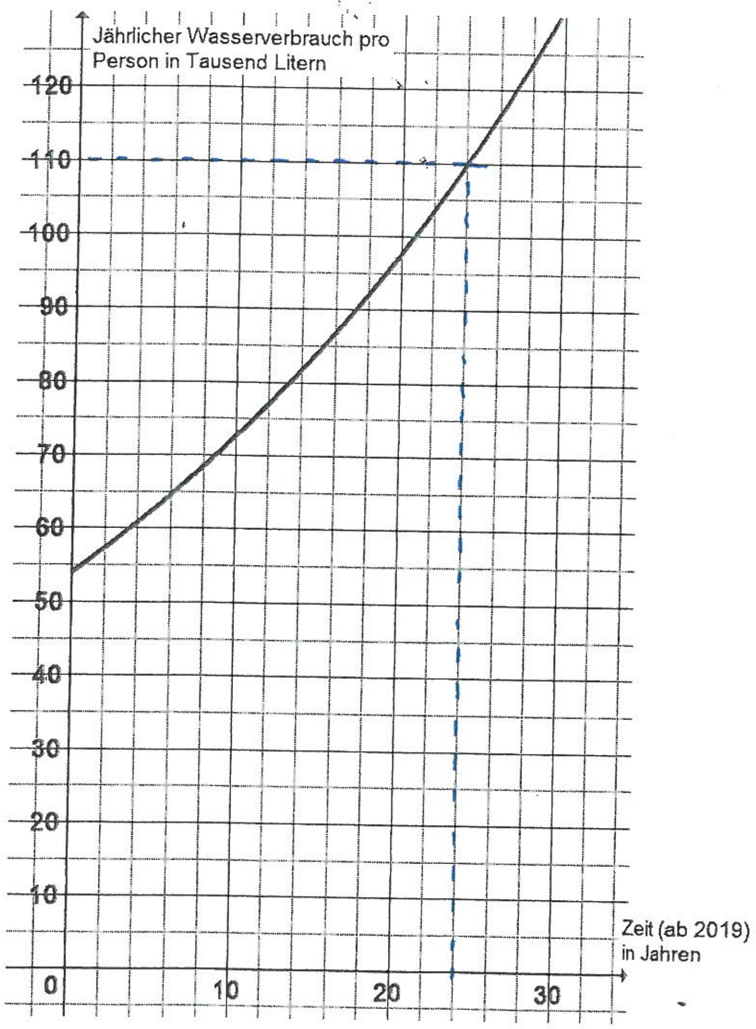
Eine Studie aus dem Jahr 2019 besagt, dass der weltweite Wasserverbrauch pro Person in Zukunft um 3 % pro Jahr steigen wird. Im Jahr 2019 wurde ein jährlicher Wasserverbrauch von durchschnittlich 54 Tausend Liter pro Person ermittelt.



a) Ergänzen Sie die Tabelle entsprechend der Angaben aus dem Text. (2 P)

Jahr	2019	2020	2021	2022
Jährlicher Wasserverbrauch pro Person in Tausend Litern	54,0	55,6	57,3	59,0

b) Der Graph zeigt den weltweiten Wasserverbrauch in Tausend Litern pro Person seit dem Jahr 2019. (3 P)



Ermitteln Sie anhand des Graphen, nach wie vielen Jahren sich der Wasserverbrauch pro Person in etwa verdoppelt haben wird.

Der Wasserverbrauch pro Person verdoppelt sich nach ca. 24 Jahren. (Das entspricht dem Jahr 2043)

Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.

54 Tsd. Liter ergeben gedoppelt 108 Tsd. Liter. Grob gerundet sind das (gut ablesbare) 110 Tsd. Liter.
Der Graph passiert die 110 Tsd. Liter bei 24 Jahren auf der x-Achse.

(Die Kästchen entsprechen auf der y-Achse 5 Tsd.-Liter-Schritten, auf der x-Achse entspricht ein Kästchen 2 Jahren [5 Kästchen auf 10 Jahre])

*c) Die Vorhersage für den weltweiten Wasserverbrauch pro Person kann durch die Gleichung $y = 54 \cdot 1{,}03^x$ beschrieben werden. (3 P)
(x: Zeit in Jahren, y: Wasserverbrauch pro Person in Tausend Litern).

Eine andere Studie schätzt, dass der jährliche Wasserverbrauch pro Person von 2019 bis 2033 insgesamt um ca. 40 % steigen wird.

Untersuchen Sie, ob beide Studien für das Jahr 2033 den gleichen Wasserverbrauch vorhersagen.

2019 bis 2033 sind 14 Jahre.

40% von 54 Tsd.

54.000 · 1,4 = 75.600 L im Jahr 2033

$y = 54 \cdot 1{,}03^x$

$x = 14$

$y = 54 \cdot 1{,}03^{14}$

$y = 54 \cdot 1{,}513$

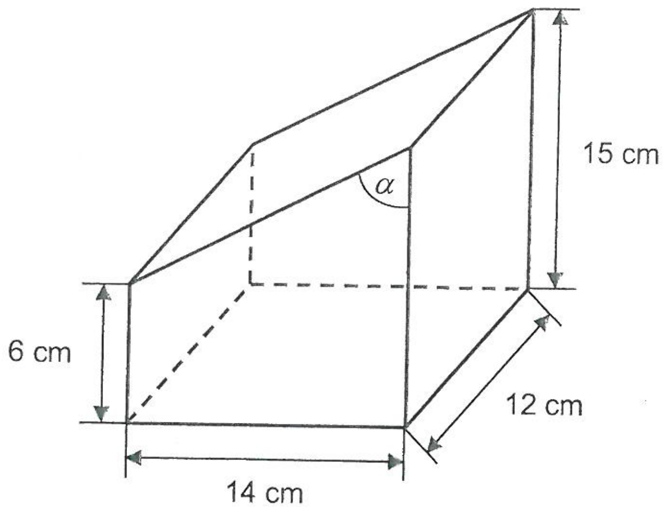
$y = 81{,}68 \approx 81{,}7$

$\Rightarrow$ 81.700 Liter pro Person im Jahr 2033.

Antwort: Die beiden Studien sagen unterschiedliche Verbräuche für das Jahr 2033 voraus: 81,7 Tsd. L laut erster, 75,6 Tsd. L laut zweiter Studie.

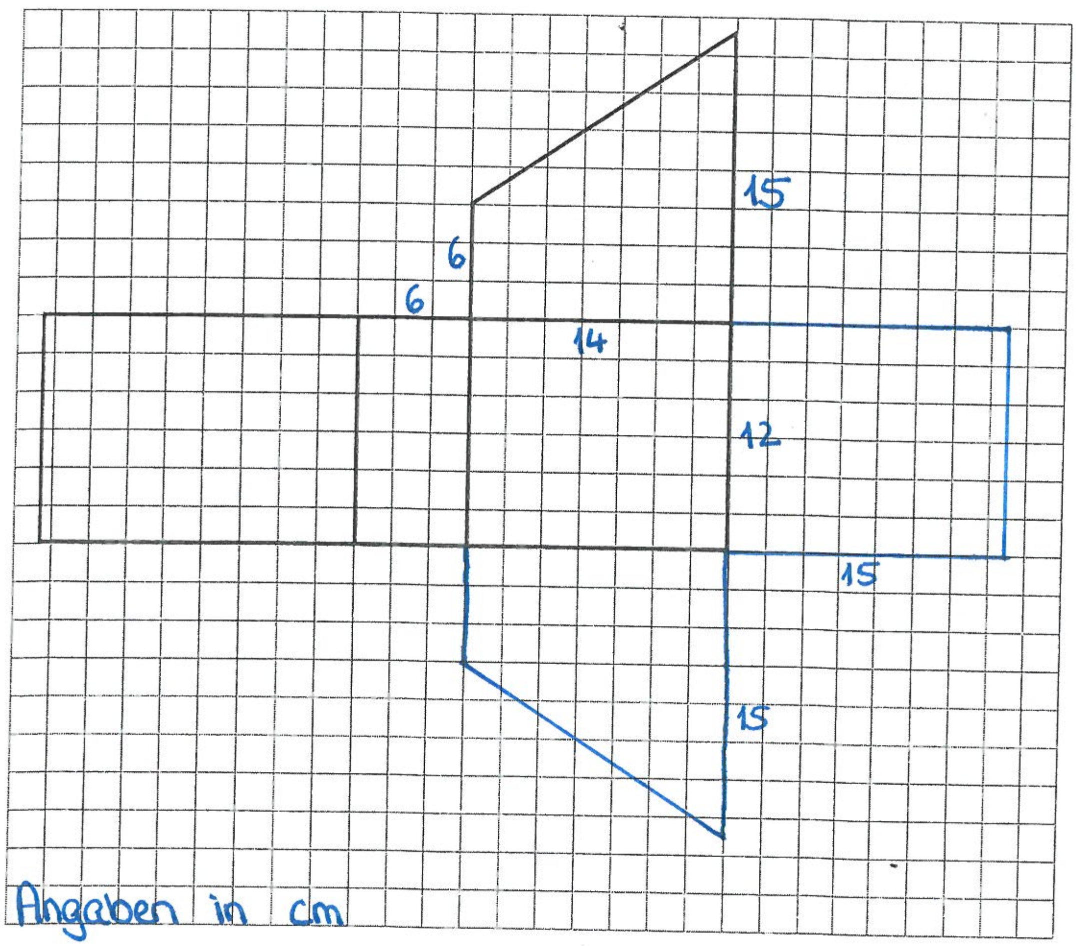
Aufgabe 5: Verpackung (7 Punkte)

Eine Schachtel hat die Form eines Prismas.

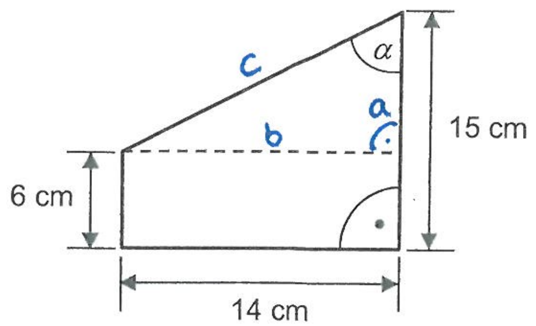


(Skizze nicht maßstabsgerecht)

a) Martina hat angefangen, das Netz dieser Schachtel zu skizzieren. Vervollständigen Sie das Netz. (2 P)



b) Berechnen Sie die Größe des Winkels α. (3 P)



(Skizze nicht maßstabsgerecht)

$a = 15\,cm - 6\,cm = 9\,cm$

a ≙ Ankathete ; b ≙ Gegenkathete ⇒ tan

$\tan\alpha = \frac{b}{a} \quad | \tan^{-1}$

$\alpha = \tan^{-1} \frac{b}{a}$

$\alpha = \tan^{-1} \frac{14\,cm}{9\,cm} = \underline{\underline{57{,}3°}}$

*c) Mehrere Schachteln sollen in eine quaderförmige Kiste verpackt werden. (2 P)

Die Kiste hat die Abmessungen: Länge = 28 cm, Breite = 24 cm, Höhe = 22 cm.

Geben Sie die größtmögliche Anzahl der Schachteln an, die in die Kiste passen. Erläutern Sie Ihren Lösungsweg. Sie können auch eine Skizze verwenden.

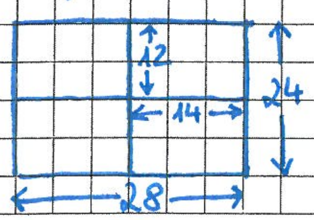
2 Schachteln über Kopf aufeinander gestapelt ergeben eine Höhe von 15cm + 6cm = 21cm Höhe.

Mit einer Breite von 14cm lässt sich die Länge der Kiste von 28 cm für 2 Schachteln nutzen.

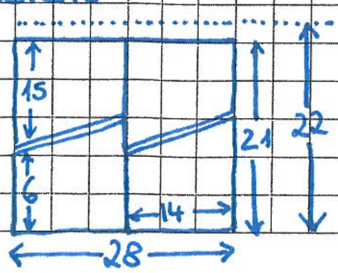
Mit einer Tiefe von 12cm lässt sich die Breite der Kiste von 24 cm für 2 Schachteln nutzen.

Daraus lässt sich schließen, dass maximal $2 \cdot 2 \cdot 2 = \underline{\underline{8 \text{ Schachteln}}}$ in die Kiste passen.

Aufsicht:



Seitenansicht:

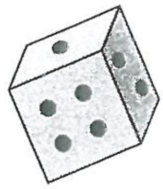


Aufgabe 6: Würfelspiel

(9 Punkte)

Wird ein Würfel zweimal nacheinander geworfen, so können sich 36 verschiedene Augenpaare ergeben.

Hinweis: Beachten Sie, dass z. B. die Augenpaare (2,1) und (1,2) unterschiedliche Ergebnisse sind.



a) Notieren Sie alle möglichen Augenpaare, bei denen der zweite Wurf die Augenzahl „2" zeigt. (3 P)

1,2 ; 2,2 ; 3,2 ; 4,2 ;
5,2 ; 6,2

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit für die Augenzahl „2" beim zweiten Wurf.

Geben Sie diese Wahrscheinlichkeit in Prozent an.

Insgesamt 36 mögliche kombinationen, 6 davon mit "2" beim zweiten Wurf:

$\Rightarrow \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \triangleq \underline{\underline{16,7\,\%}}$

b) Max behauptet: (3 P)

„Die Wahrscheinlichkeit, zwei gleiche Augenzahlen zu würfeln, ist größer als die Wahrscheinlichkeit, zuerst eine 6 zu würfeln."

Entscheiden Sie, ob Max Recht hat.

☐ Max hat Recht ☒ Max hat nicht Recht

Begründen Sie Ihre Entscheidung.

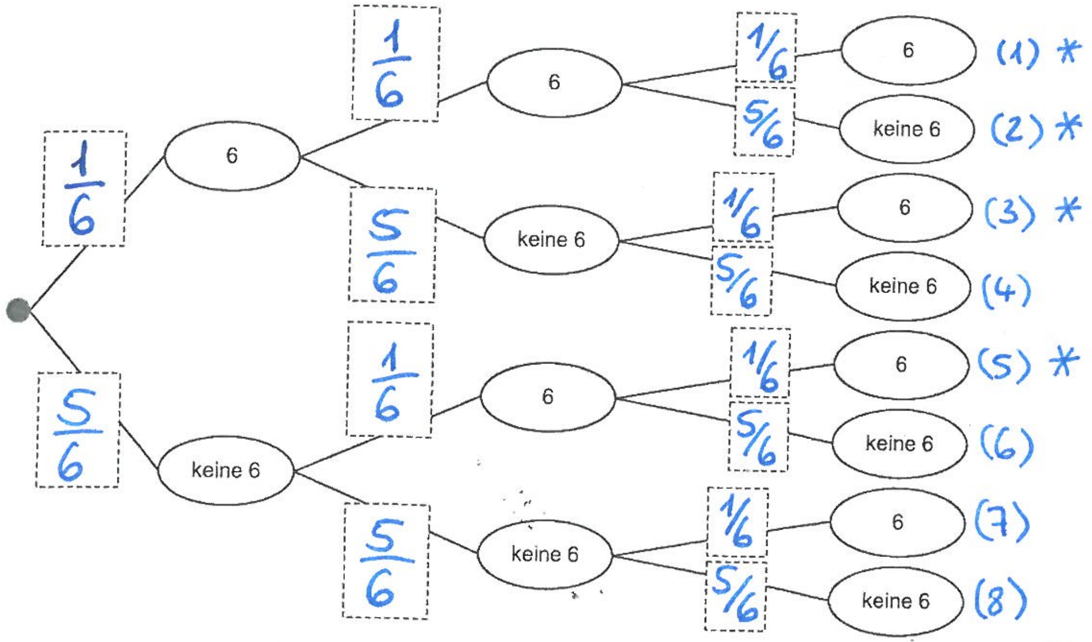
Zwei gleiche Augenzahlen: $\frac{6}{36} = \frac{1}{6} \triangleq \underline{16,7\,\%}$ || Zuerst eine 6: $\frac{6}{36} = \frac{1}{6} \triangleq \underline{16,7\,\%}$

Max hat Unrecht, da die Wahrscheinlichkeiten für beide Ereignisse gleich groß sind, nämlich 16,7 %.

Lisa und Max wollen ins Kino gehen.

Lisa wirft den Würfel 3 Mal hintereinander. Wenn sie dabei mindestens 2 Mal eine 6 würfelt, zahlt Max beide Kinokarten.

*c) Vervollständigen Sie das Baumdiagramm. (3 P)



* Max zahlt

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Max die Karten bezahlt.

$P_{(1)} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$

$P_{(2)} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{216}$

$P_{(3)} = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{216}$

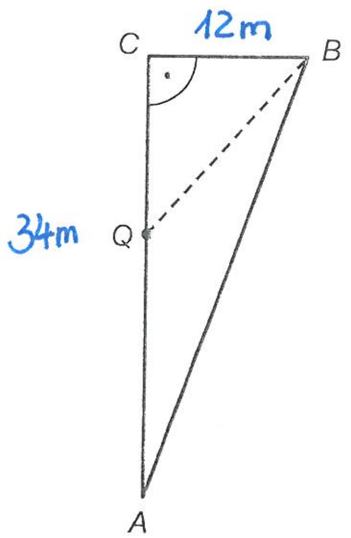
$P_{(5)} = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{216}$

$P_{(1)} + P_{(2)} + P_{(3)} + P_{(5)} = \frac{2}{27} \mathrel{\hat{=}} \underline{\underline{7{,}4\,\%}}$

Die Wahrscheinlichkeit, dass Max die karten bezahlt, liegt bei $\underline{\underline{7{,}4\,\%}}$.

Aufgabe 7: Dreiecke (7 Punkte)

Gegeben ist das rechtwinklige Dreieck *ABC*.
Die Strecke $\overline{BC}$ ist 12 m lang und
die Strecke $\overline{AC}$ hat eine Länge von 34 m.



(Skizze nicht maßstabsgerecht)

a) Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{AB}$. (2 P)

$a^2 + b^2 = c^2$

$c^2 = (12\,m)^2 + (34\,m)^2$

$c^2 = 144\,m^2 + 1156\,m^2$

$c^2 = 1300\,m^2 \quad |\sqrt{\ }$

$c = 36{,}06\,m = \overline{AB} \approx \underline{\underline{36{,}1\,m}}$

b) Der Punkt *Q* liegt auf der Strecke $\overline{AC}$. Der Flächeninhalt des Dreiecks *QBC* beträgt 90 m². (2 P)

Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{QC}$.

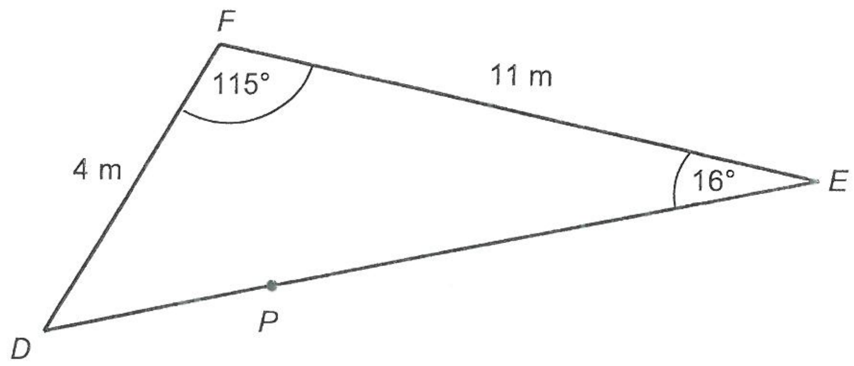
$A = \frac{1}{2}ab$

$90\,m^2 = \frac{1}{2} \cdot 12\,m \cdot b$

$90\,m^2 = 6\,m \cdot b \quad |:6\,m$

$\underline{\underline{b = 15\,m}} = \overline{QC}$

Betrachtet wird das Dreieck *DEF*. Der Punkt *P* liegt auf der Strecke $\overline{DE}$.



(Skizze nicht maßstabsgerecht)

*c) Die Länge der Strecke $\overline{PE}$ beträgt 10 m. (3 P)

Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{DP}$.

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$

$\frac{4m}{\sin 16°} = \frac{\overline{DE}}{\sin 115°} \quad | \cdot \sin 115°$

$\overline{DE} = (4m \cdot \sin 115°) : \sin 16° = 13{,}15\,m$

$\overline{DP} = \overline{DE} - \overline{PE}$

$\overline{DP} = 13{,}15m - 10m = 3{,}15m \approx \underline{\underline{3{,}2m}}$

Die Strecke $\overline{DP}$ hat ca. 3,2 m Länge.